ÍNDICE

AO LEITOR

«Um dos maiores pecados da educação moderna, em todas as áreas do *curriculum*, tem sido a recusa de exigir sérios esforços.» Assim se exprimiu o historiador literário Douglas Bush [**Bus59**, página 115].

Seja dito a propósito que ler este livro requer um sério esforço. Tendo exigido um sério esforço, por outro lado, quero assegurar-lhes que nada mais é preciso, essencialmente, do que um sério esforço para dominar tudo o que este livro contém. Em princípio não é preciso saber literalmente nada de Matemática para começar a ler. Com efeito, quanto pode ser preciso saber para compreender algo que começa por explicar por que razão 273 representa duas *centenas* e sete *dezenas* e três *unidades* e depois continua dando uma explicação cuidadosa dos "comos" e "porquês" da adição de dois números naturais? Na prática, porém, este livro pode constituir um desafio excessivo se não se tiver alguma familiaridade com a vertente procedimental da Matemática da escola primária. Embora todos os procedimentos usuais sejam cuidadosamente revistos, presume-se que o leitor está familiarizado com os cálculos rotineiros.

Para os que se consideram "matemático-fóbicos" tenho uma mensagem especial. A "matemático-fobia" do leitor pode bem ser o resultado de lhe terem pedido repetidas vezes para agir sem beneficiar de suficiente preparação ou de explicações suficientes para o efeito. Foi-lhe dito para simplesmente cumprir ordens e depois deixaram-no sozinho a batalhar por si próprio. Seria de estranhar se não fosse "matemático-fóbico", mas deixe-me assegurar-lhe que este livro não se dedicará a um tal comportamento irracional. *Não lhe pedirei que faça o que quer que seja sem primeiramente lhe fornecer toda a informação de que precisa, nem antes de lhe explicar por que razão aquilo que tem de fazer está correto*. Sendo assim, por que razão não dar uma oportunidade a este livro e recomeçar tudo de novo?[16]

O que se pode esperar aprender neste livro? Aqui vai um apanhado.

Aprender-se-á algo acerca do nível de *precisão* inerente à Matemática. A literatura em Educação Matemática, ao evitar uma linguagem explícita e com a queda que

---

[16] Lá porque o primeiro filme que viu era um filme de monstros que o assustou terrivelmente, não se segue que todos os filmes deste mundo andem por aí a tentar apanhá-lo.

manifesta para a evocação, tende a discutir matemática em termos quase poéticos. Em contraste, este livro evita a poesia e opta por apresentar a Matemática usando uma prosa austera e precisa para que possa ser compreendida sem ambiguidade. Por exemplo, um artigo em Educação Matemática, tentando ajudar professores do ensino básico a perceber a multiplicação de frações poderia descaradamente descrever a multiplicação de frações como «descobrir relações multiplicativas entre estruturas multiplicativas». A sedutora cadência de tal escrita envergonha tudo o que este livro tem para oferecer, mas para o propósito de comunicar Matemática é bastante mais produtivo dar em primeiro lugar um significado *preciso* a $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ e em seguida mostrar como este significado preciso, em conjunto com raciocínio lógico, pode explicar procedimentos usuais relativos à multiplicação e ser útil para resolver problemas. De facto, este livro está fundamentalmente focado no uso de uma linguagem *rigorosa* e de raciocínios *rigorosos* para efetuar deduções lógicas e resolver problemas.[17]

A experiência de aprendizagem a que até agora esteve sujeito pode não ter preparado o leitor para este tipo de rigor. Muitos manuais escolares habituais e materiais de formação contínua ensinam rotineiramente procedimentos ou conceitos dedicando-se a extensas e vagas dissertações acerca desses procedimentos ou conceitos em contextos tão variados quanto possível. A ideia que subjaz a esta estratégia é que, tal como as crianças aprendem a falar enunciando frases completas sem compreenderem as palavras individuais que usam, pode-se aprender Matemática de modo semelhante. Esta estratégia, evidentemente, não funciona para nenhuma parte da matemática a não ser a mais elementar e a presente crise da educação em Matemática Escolar é testemunha eloquente deste facto. Mas uma vez que é provável que o leitor tenha ficado impregnado por essa imprecisão, a exigência de pensamento rigoroso e de uma articulação rigorosa que este livro lhe impõem pode ser sentida, numa primeira fase, como um fardo mais do que como uma ajuda à aprendizagem. No entanto, cedo o leitor se aperceberá da razão pela qual este rigor é simultaneamente necessário e benéfico na aprendizagem e ensino da Matemática.

Concomitantemente com a exigência de rigor, este livro insiste na *importância primordial de dar definições precisas*. A presente aversão às definições na Matemática Escolar é a consequência inevitável da rarefação de definições no desenvolvimento matemático da maioria dos manuais e dos materiais de formação contínua para o K-12. Por exemplo, uma definição de um número racional $\frac{a}{b}$ pode aparecer *de modo puramente formal* como solução da equação $bx = a$,[18] mas, no entanto, o desenvolvimento subsequente dos números racionais parece ignorar totalmente esta definição,

[17] Ou, como os matemáticos preferem dizer, *demonstrar teoremas*. Não há qualquer distinção lógica entre resolver problemas e demonstrar teoremas.

[18] Tal definição formal, ou seja, uma definição que apenas assenta em raciocínios algébricos, é uma má escolha para definir números racionais no contexto da Matemática Escolar porque a análise *matemática* baseada em tal definição requer um grau de abstração maior do que o adequado para uma aula do nível K-12. É claro que este tipo de definição é empregue rotineiramente em Matemática Superior.

mesmo quando se trata de discutir frações equivalentes, assunto ao qual a definição acima serviria como uma luva. Acontece portanto que, num contexto escolar, uma definição se torne apenas mais um item para memorizar para conseguir passar em exames estandardizados.

Este livro coloca as definições dos conceitos no seu devido lugar em Matemática, nomeadamente, o local dianteiro central como *fundamento para todos os raciocínios e discussões*. Por exemplo, uma fração é considerada por alguns educadores matemáticos como um conceito tão complexo que o respetivo significado não deveria ser apresentado de modo sucinto, mas antes expandido gradualmente no decurso de discussões subsequentes, para que as suas distintas "personalidades"[19] possam emergir sem pressa, uma a uma. Seja dito sem hesitação que tal abordagem das frações não constitui matemática aceitável no 5.° ou 6.° graus[20], muito menos para além deste nível. Trata-se de má pedagogia, porque deixa os alunos num estado de perpétua confusão acerca daquilo com que estão a lidar. Como se pode esperar que dominem o conceito de fração se se convencerem de que o que quer que aprendam será reformulado alguns dias ou algumas semanas depois?

Pelo contrário, este livro define fração no início da exposição: é um de entre os pontos de um conjunto contido na reta numérica, descrito com precisão, sendo cada asserção subsequente acerca de frações explicada cuidadosamente usando esta definição. Por outras palavras, se houver algo acerca de frações que não puder ser explicado usando apenas o facto de que uma fração é um tal ponto na reta numérica, então não se encontrará neste livro. O mesmo vale para todos os conceitos a introduzir, *e.g.*, a divisão inteira entre números naturais, as dízimas, os números racionais (relativos), etc. Em cada caso a definição determina completamente o que se pode dizer acerca do conceito. O forte impacto que tal ambiente matemático exerce na aprendizagem e ensino da Matemática consiste em que, em qualquer ponto de uma exposição, o aluno nunca pode pôr em dúvida o local em que se situa. O que quer que precise de saber acerca de um conceito já está contido na respetiva definição e qualquer receio de que possa não ser capaz de o aprender, porque lhe terá sido negado o acesso a alguma informação secreta, foi afastado de uma vez por todas. Desta maneira, a todos é dada uma regra de jogo clara para aprender Matemática: a informação necessária para aprender está sempre em cima da mesa e não há surpresas nem agendas escondidas.

Tem-se dito, com propriedade, que a Matemática não é um desporto para espetadores. Os que quiserem aprender essa ciência têm de pôr as mãos na massa para o fazer. A esta luz, em que medida é que o conhecimento da importância das definições influencia o estudo da Matemática em termos de atuações concretas? Impõe que, uma vez aceite a definição de determinado conceito, se *reordenem* metodicamente todos os factos relacionados com esse conceito de uma maneira lógica, até que se consiga

19 Não se trata aqui de um conjunto terminológico *ad hoc* que eu tenha inventado, mas antes o que é utilizado correntemente na literatura em Educação Matemática.

20 NT: Corresponde aos 5.° ou 6.° anos do Ensino Básico português.

remontar esses factos até à definição, enquanto ponto de partida. *Também se pode decorar a definição, até ao ponto em que se seja capaz de a recordar instantaneamente*. Nada disto é fácil, mas este livro tentará tanto quanto possível facilitar a transição dos antigos conhecimentos do leitor para os novos. Esta transição, no entanto, não terá lugar sem o esforço de memorizar cada definição e de reorientar a bússola mental de maneira que se consiga abarcar o modo como os antigos factos agora fluem naturalmente e logicamente dessa definição. Ainda que se trate de trabalho árduo, é um trabalho árduo que vale bem a pena.

Se esta abordagem ao estudo dos números parecer demasiado austera e impiedosa e, consequentemente, demasiado restritiva para ser útil, não há que temer: *cada* facto usual acerca de números poderá ser encontrado neste livro. Mais a mais, dispondo-se de definições precisas, o raciocínio rigoroso torna-se agora possível.

Somos assim conduzidos à seguinte principal característica deste livro: a ênfase perseverante no *raciocínio*. Dá-se uma razão para todas as asserções: porque está correta a regra de multiplicação pelo inverso para a divisão de frações? Porque é positivo o produto de números negativos? Por que razão uma fração que é definida como partes de um todo também é o resultado de uma divisão? Por que razão cada fração é equivalente a uma e apenas uma fração irredutível? Etc.

No início pode achar-se opressivo ser-se bombardeado por tantos "porquês" em cada esquina,[21] mas com algum esforço empenhado o leitor habituar-se-á a isso e começará a apreciar como é vantajoso tornar o raciocínio parte do seu repertório básico, o que é fácil de explicar. Os professores de matemática têm de manobrar constantemente para ganhar a confiança dos alunos porque a Matemática, em última análise, diz respeito a conceitos abstratos e intangíveis. Os alunos precisam de alguém em quem confiar para os conduzir através da selva de abstrações. Quando virem um professor tão seguro do seu trajeto que pode dar uma razão para cada passo ao longo do caminho, estarão dispostos a confiar nele. Assim, a aprendizagem da Matemática torna-se possível.

O raciocínio desarma a perceção dos estudantes de que a Matemática é um jogo jogado com regras de que não têm qualquer conhecimento.

Uma característica final deste livro que merece ser mencionada é a ênfase na *estrutura da Matemática*. Já que «estrutura» pode ser um conceito novo para o leitor, comecemos por uma analogia linguística. Suponhamos que um professor de língua portuguesa para estrangeiros[22] é abordado por um dos alunos que lhe pergunta o significado da palavra «enorme» e que o professor responde «gigantesco». Será que o professor foi competente? *Não*, responderá provavelmente o leitor. O senso comum diz-nos que se uma criança a aprender português como segunda língua acabou de encontrar pela

---

[21] Um professor da região de Los Angeles, Winnie Gilbert, que trabalhou comigo durante alguns anos, descreveu-me recentemente o comentário que os alunos fizeram ao seu estilo de ensino: «Nunca nos perguntaram tantos porquês na nossa vida!».

[22] NT: No original, *a teacher of ESL students*, onde *ESL* é uma sigla para *English as a second language*.

primeira vez uma simples palavra como «enorme», é ténue a probabilidade de ter antes aprendido o significado da palavra mais longa, «gigantesco». Muito provavelmente a explicação do professor não fará sentido para esse aluno. Note-se que, em parte, o raciocínio que conduz a esta apreciação baseia-se na compreensão global que temos da trajetória normal que é seguida na aprendizagem de uma língua, passando-se do simples para o complexo.

Consideremos agora uma situação análoga em Matemática. Uma explicação muito divulgada para o *facto fundamental* relativo a frações equivalentes, nomeadamente $\frac{m}{n}=\frac{km}{kn}$, dados números naturais k, m, n $(k, n \neq 0)$, é a seguinte:

$$\frac{m}{n}=1\times\frac{m}{n}=\frac{k}{k}\times\frac{m}{n}=\frac{km}{kn}.$$

Será que o leitor, enquanto professor, considera que se trata de uma boa explicação? Uma vez que se trata de uma explicação matemática, não podemos usar apenas o senso comum, mas temos de basear-nos antes no conhecimento científico de que dispomos, imaginando *a trajetória normal para estudar frações*. Poderíamos raciocinar como se segue.

O facto fundamental tem de ser destacado no início de qualquer exposição acerca de frações, já que a noção de equivalência de frações é básica. Por outro lado, o conceito de multiplicação de frações requer considerações elaboradas para que faça sentido e um tal estudo não pode ter lugar perto do princípio da exposição.[23] Sendo este o caso, a utilização de algo misterioso e ainda indefinido (multiplicar frações) para explicar o que é mais elementar (o facto fundamental) é logicamente incorreto. Devemos então concluir que esta explicação não funciona.

O raciocínio precedente ilustra a *estrutura da Matemática*. As asserções matemáticas fazem parte de um padrão *hierárquico*, não surgindo conjuntamente de maneira arbitrária. Logo que se escolhe determinada via de desenvolvimento para dado assunto, passa a haver uma certa rigidez no desenrolar das ideias matemáticas: alguns conceitos e procedimentos têm de preceder outros porque o raciocínio lógico assim o determina. Por exemplo, acabámos de ver que surgindo o conceito de frações equivalentes antes do conceito de multiplicação de frações no desenvolvimento usual desta teoria, o recurso à multiplicação de frações não é mais adequado para explicar a equivalência de frações do que o uso de «gigantesco» para explicar «enorme». Este aspeto particular da estrutura da matemática reflete-se no ensino das frações.

Mais geralmente, a abordagem usual aos números no *curriculum* escolar começa com os números naturais, depois as frações e finalmente os números racionais (relativos).[24] Não faz sentido nenhum tentar ensinar frações aos alunos se ainda não

---

23 A razão de ser desta afirmação pode ser parafraseada pela pergunta: «Como multiplicar dois pedaços de piza?» (roubei esta frase à especialista em Ciências da Educação britânica Kathleen Hart [**Har00**]).

24 Estes tópicos podem evidentemente ser apresentados por ordem distinta; por exemplo, números naturais, números inteiros, frações e números racionais relativos.

tiverem conhecimentos firmes acerca de números naturais. De modo análogo, define-se a adição de frações antes da subtração, a multiplicação antes da divisão, a divisão antes das percentagens, etc. Por essa razão não se pode ensinar com sucesso a divisão de frações antes da multiplicação ou ensinar as percentagens antes da divisão. Um professor tem de ter sempre consciência desta estrutura hierárquica para que, quando dá uma explicação, não o faça usando indiscriminadamente tudo o que se encontra debaixo do Sol. Antes, uma explicação matemática tem de respeitar esta estrutura e apenas utilizar conhecimentos que sejam compatíveis com ela.

Espero que o leitor comece a perceber que este livro lhe pede um esforço sério apenas para assegurar que vai aprender Matemática correta e, subsequentemente, ensinar Matemática correta. A Matemática correta é muito mais fácil de ensinar do que Matemática incorreta, pela mesma razão de que um artigo bem escrito é muito mais fácil de ler do que um artigo mal escrito. Os esforços que o leitor desenvolva para aprender Matemática correta ajudá-lo-ão no final a tornar-se num melhor professor. E é afinal *esse* o objetivo deste livro.

Capítulo 1

VALOR POSICIONAL

Neste capítulo discute-se o conceito de *valor posicional* no nosso sistema de numeração, *i.e.*, o sistema de numeração Indo-Árabe. Nas exposições usuais o valor posicional é considerado como a ideia mestra de toda a aritmética e também algo que qualquer aluno do ensino elementar deve apreender desde o início da escolaridade. Não há dúvidas quanto à importância deste conceito, mas a atual incapacidade de incutir em *todas* as crianças a noção dessa importância levanta a questão de saber se a exigência que se faz às crianças de aceitar esse facto como artigo de fé será uma boa prática pedagógica. Independentemente da pedagogia, no entanto, é essencial que os professores saibam que, ao contrário de um artigo de fé, o valor posicional é consequência inevitável do modo como no nosso sistema de numeração se efetua a contagem dos números (naturais). Tornando os professores conscientes deste facto, esperamos dar-lhes uma opção para o modo como pretendem abordar nas aulas o valor posicional. Por esta razão devotaremos espaço considerável a explicar como se conta e por que razão uma compreensão profunda da contagem permite elucidar outros conceitos básicos relacionados com números naturais, tais como «maior», «menor», $53 \times 10 = 5300$, ou a decomposição decimal de um número (natural).

As secções são as seguintes:

- Como Contar
- Valor Posicional
- A Utilização de Notação Simbólica
- A Reta Numérica
- Comparar Números (Introdução)
- A Multiplicação e a Decomposição Decimal de um Número
- Tudo acerca do Zero
- O Sistema de Numeração Indo-Árabe

1.1. Como Contar

A Matemática começa com a contagem. Contar até um número pequeno (dois ou três, por exemplo) pode fazer-se sem aparato e assim foi feito mesmo nas tribos mais primitivas. Contar até um número grande, tal como o número de soldados num exército ou o número de ovelhas num enorme rebanho, no entanto, é tudo menos simples e requer a ajuda de algum sistema elaborado para nos guiar. Já há quase 400 anos que a contagem no Ocidente, e subsequentemente por todo o Mundo, tem sido feita usando o assim chamado **sistema de numeração Indo-Árabe** (veja-se a secção 1.8, **O Sistema de Numeração Indo-Árabe**, na página 63 para mais informação). Nesta secção entramos em alguns pormenores deste processo de contagem porque é o que explica o *valor posicional*, que é o conceito básico por detrás das contas com números naturais.

São duas as ideias básicas na construção do sistema de numeração Indo-Árabe:

(1) A primeira é a utilização de apenas dez símbolos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e nada mais.

(2) A segunda é o uso desses símbolos para escrever todos os possíveis números de contagem, colocando os dez símbolos em diferentes **posições** ou **casas**.

Devido a (1), o sistema Indo-Árabe também se chama **sistema de numeração decimal**. É prática comum referir qualquer destes dez símbolos numa posição específica de um número de contagem, tal como 2 em 4273 como **o dígito** ou **algarismo**[2] **nessa casa**. Assim, **o terceiro dígito a contar da esquerda** 4723 é 2, ou, o que é o mesmo, **o dígito na terceira casa a contar da esquerda** de 4723 é 2.

Por exemplo, o número

$$11\ 732\ 976\ 646\ 254$$

utiliza 14 casas decimais; trata-se da dívida nacional dos E.U.A. (em dólares) no dia 1 de setembro de 2009, às 2 horas da tarde, Tempo Médio de Greenwich.[3] O quarto, sexto e sétimo algarismo a contar da direita deste número com 14 dígitos são todos iguais a 6; o algarismo na quarta casa significa 6 *milhares*, o que se situa na sexta casa significa 6 *centenas de milhares* e finalmente o que se situa na sétima casa significa 6 *milhões*. Na terminologia usual, o **valor posicional** do lugar ocupado pelo primeiro 6 (a contar da direita) é *mil*, o do segundo 6 é *cem mil* e o do último 6 é *um milhão*. Estes três números, então, representam seis mil, seiscentos mil e seis milhões, respetivamente. Como surgem estes três significados para o algarismo 6 é o que pretendemos explicar em seguida.

---

[2] NT: No original utiliza-se apenas o termo *digit* para referir o que em português se designa por "dígito" ou "algarismo"; no que se segue utilizar-se-á qualquer um destes termos para traduzir *digit*.

[3] Propriamente falando "11 732 976 646 254" é o *numeral Indo-Árabe* que representa o valor em dólares da dívida nacional dos E.U.A. no dia 1 de setembro de 2009, mas, a não ser que seja estritamente necessário, evitaremos esse formalismo árido.

Tomemos em mãos o problema da contagem desde o princípio. Consideremos como escrever, sistematicamente, todos os números possíveis se apenas dispusermos de uma casa e, em seguida, o mesmo problema se dispusermos de duas casas decimais, depois três casas decimais, depois quatro casas decimais, etc. Observando-se o padrão à medida que vamos aumentando o número de casas decimais uma a uma, conseguiremos compreender o significado do valor posicional.

Suponhamos que apenas temos uma posição para trabalhar. Então escrevemos simplesmente os primeiros dez números usando os símbolos dados $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *por esta ordem*. Esta posição chama-se tradicionalmente a **casa das unidades** e os números que assim se obtêm fazendo apenas uso da casa das unidades chamam-se **números com um dígito**, **com um algarismo** ou **com uma casa**. Assim, apenas existem dez números com um algarismo. Chegados a este ponto torna-se necessário explicitar o que para nós significa **contar**. **Contar um passo a partir de** 0 significa passar de 0 a 1, **contar dois passos a partir de** 0 significa passar de 0 a 1 e depois a 2, etc., e **contar nove passos a partir de** 0 faz-nos aterrar em 9, como se segue:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9.$$

Devido ao modo como contamos a partir de 0 dizemos que 1 é o **primeiro número a contar de 0** e 9 é o **nono número a contar de 0**, etc.

A contagem para em 9 porque não há para onde ir se nos restringirmos a apenas uma casa e não admitirmos o uso de outros símbolos. Podemos, evidentemente continuar artificialmente a contagem reciclando os mesmos dez símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e colocando-os em linhas sucessivas, como se segue:

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Neste esquema, contando nove passos a partir de 0 leva-nos a aterrar no 9 da primeira linha e contando mais um passo aterramos no 0 da segunda linha. Continuando a contar desta maneira, o passo seguinte conduz-nos ao 1 da segunda linha e mais um passo conduz-nos ao 2 da segunda linha, etc. Eventualmente, acabamos por chegar ao 9 da segunda linha. O passo seguinte leva-nos ao 0 da terceira linha, etc. Este processo também nos permite, é certo, contar indefinidamente, mas um problema óbvio que se levanta é que não temos maneira de distinguir as linhas umas das outras, pelo que, por exemplo, andando três passos a partir de 0 e andando treze passos a partir de 0 somos conduzidos em ambos os casos ao símbolo 3 (ainda que seja, respetivamente, o 3 na primeira linha e o 3 na segunda linha).

A descoberta essencial inerente ao sistema de numeração Indo-Árabe foi a tomada de consciência de que *se permitirmos o uso de duas posições em lugar de uma só*, então poderemos distinguir quaisquer de entre dez linhas destas, colocando os dez símbolos

0, 1, 2, etc. sucessivamente à esquerda de cada um dos dez números.[4] Esta nova posição designa-se por **casa das dezenas**. Mais precisamente, na primeira linha, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, coloca-se o 0 na casa das dezenas de cada número de maneira a obter-se 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09. Para a linha de números seguinte regista-se o facto de que se trata de nova linha colocando-se o algarismo 1 em vez do 0 na casa das dezenas de cada número, obtendo-se 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. A linha seguinte dá depois origem aos números 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29; ainda mais uma linha e obtém-se 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, etc. Quando se chega à décima linha, coloca-se um 9 na casa das dezenas de cada número, esgotando-se assim os dez símbolos na nova casa, e o que então obtemos é o seguinte quadro retangular:

$$\begin{array}{cccccccccc}
00 & 01 & 02 & 03 & 04 & 05 & 06 & 07 & 08 & 09 \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\
20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
90 & 91 & 92 & 93 & 94 & 95 & 96 & 97 & 98 & 99
\end{array}$$

Consequentemente, utilizando-se duas casas decimais podemos agora distinguir umas das outras dez linhas de dez números cada, pelo que podemos agora contar sem qualquer ambiguidade de 0 até 99.

Estes números de 00 até 99 são os únicos que podemos escrever se nos restringirmos a duas casas decimais; chamamos-lhes **números de até dois dígitos**, **até dois algarismos** ou **até duas casas decimais**, e a razão de ser desta terminologia é o facto de na primeira linha, os números 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, não são mais do que os números com apenas um algarismo mas com um 0 acrescentado à esquerda, indicando que estamos agora a utilizar duas casas decimais. Por este motivo é usual reescrevê-los simplesmente como 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pelo que, entre os números até dois dígitos, apenas os que se seguem a 09, *i.e.*, 10, 11, 12, …, 19, 20, …,97, 98, 99 se designam por números **com dois dígitos**, **com dois algarismos** ou **com duas casas decimais**. A maneira usual de escrever os números até dois dígitos é, portanto, a seguinte:

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\
20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
90 & 91 & 92 & 93 & 94 & 95 & 96 & 97 & 98 & 99
\end{array}$$

Se nos limitarmos a duas casas decimais apenas poderemos contar até 99; mas note-se que depois de 9 vem 10, pelo que 10 é o primeiro número com dois dígitos. Note-se também que, quando os primeiros 100 números se escrevem desta maneira, o 1 à esquerda de cada número da segunda linha representa a *primeira* vez que os dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se repetem, o 2 à esquerda de cada número da

[4] Note-se que o facto de se colocar a nova casa decimal à *esquerda* da casa das unidades é estritamente uma CONVENÇÃO e nada mais. Poderia ter sido à *direita* da casa das unidades.

terceira linha representa a *segunda* vez que os dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se repetem, o 5 à esquerda de cada número da sexta linha representa a *quinta* vez que os dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se repetem, etc.

Este quadro retangular mostra claramente *por que razão são necessários dez passos para contar de* 0 *a* 10, *de* 10 *a* 20, *de* 20 *a* 30, etc. De facto, estes números estão na coluna da esquerda; para se descer verticalmente de 10 a 20, por exemplo, temos de atravessar a segunda linha da esquerda para a direita e são necessários nove passos para o fazer, já que há dez números por linha. Então, contando mais um passo a partir de 19, chegamos a 20. Este quadro retangular também explica *por que razão o algarismo da esquerda, como por exemplo o* 3 *em* 38, *não representa* 3 *mas sim* 30, já que

> *o* 3 *em* 38 *indica que* 38 *está na quarta linha do quadro retangular e portanto têm de contar-se três linhas de dez números antes de se chegar a* 30.

É altura de fazer uma pausa e refletir acerca da contagem dos primeiros 100 números. A lição fundamental do sistema de posição é que num número como 38 *o* 3 *não representa* 3 *mas sim* 30, *ao passo que o* 8 *é apenas* 8; pretendemos que os alunos na escola primária adotem esta afirmação como um "mantra". O objetivo da análise anterior é tornar óbvio que se os alunos aceitarem a limitação de apenas se usarem dez símbolos para contar e percorrerem as razões para se escreverem os primeiros 100 números do modo prescrito, poderão vir a aceitar o significado do 3 em 30 por si próprios sem serem forçados a memorizá-lo como um facto consumado. Verificam que o 3 tem de ser colocado à esquerda de 0, 1, 2, …, 9 para significar que esta é a *terceira* vez que repetimos estes dez símbolos e que consequentemente este 3 encerra um significado diferente de, digamos, o 3 em 53. É provável que mesmo as crianças prefiram ver a razão para fazer algo em vez de serem obrigadas a engolir esses procedimentos como um xarope. Podem aprender o sistema de posição muito melhor, como resultado de aprenderem a contar deste modo.

Depois de ficar bem percebido o significado de um número com dois dígitos, a extensão desta compreensão a números com três ou mais algarismos não deveria ser difícil.

Deste modo, para se continuar a contar, mas, mesmo assim, sem se introduzirem novos símbolos, segue-se o mesmo método que anteriormente, usando-se mais uma casa, a qual será mais uma vez considerada à *esquerda* da casa das dezenas, por uma questão de coerência. Mais pormenorizadamente, reciclam-se os números de 00 a 99 numa única linha e copiam-se para sucessivas linhas; deste modo, tal como antes, pode contar-se indefinidamente, contando-se cada linha da esquerda para a direita e aterrando-se em seguida no primeiro número da linha seguinte para se continuar a contar. Reconhece-se o defeito de ambiguidade nesta maneira de contar porque todas as linhas são idênticas; então coloca-se cada um dos dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sucessivamente na posição à esquerda da casa das dezenas, distinguindo-se assim entre si dez destas linhas, ou, o que é o mesmo, tomando-se nota da ordem em que surgem dez linhas de números 00, 01, …, 99 até dois dígitos. A primeira linha é portanto registada com um 0 na casa das centenas, portanto 000, 001, 002, 003, …, 009, 010, 011, …, 098, 099. Para a segunda linha, substitui-se o 0 na casa das centenas por 1, obtendo-se 100, 101, 102, 103, …, 109, 110, 111, …, 198, 199. Da mesma maneira, a terceira linha transforma-se em 200, 201, 202, 203, …, 209, 210, 211, …, 298, 299, etc., até que chegamos finalmente a 900, 901, 902, 903, …, 909, 910, 911, …, 998, 999 na décima linha. Não podemos ir mais longe neste processo porque esgotámos os dez símbolos na nova casa; simbolicamente obtém-se o seguinte quadro retangular:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
000 & 001 & 002 & \cdots & 009 & 010 & 011 & \cdots & 019 & 020 & 021 & \cdots & \cdots & 098 & 099 \\
100 & 101 & 102 & \cdots & 109 & 110 & 111 & \cdots & 119 & 120 & 121 & \cdots & \cdots & 198 & 199 \\
200 & 201 & 202 & \cdots & 209 & 210 & 211 & \cdots & 219 & 220 & 221 & \cdots & \cdots & 298 & 299 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & & & & \vdots \\
800 & 801 & 802 & \cdots & 809 & 810 & 811 & \cdots & 819 & 820 & 821 & \cdots & \cdots & 898 & 899 \\
900 & 901 & 902 & \cdots & 909 & 910 & 911 & \cdots & 919 & 920 & 921 & \cdots & \cdots & 998 & 999
\end{array}$$

A nova posição designa-se por **casa das centenas** (a terceira posição a contar da direita).

A contagem para em 999, se apenas dispusermos de dez símbolos e três casas decimais para trabalhar; estes chamam-se os **números de até três dígitos**, **até três algarismos** ou **até três casas decimais**. Tal como antes, a primeira linha de números, *i.e.*,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
000 & 001 & 002 & \cdots & 009 & 010 & 011 & \cdots & 019 & 020 & 021 & \cdots & \cdots & 098 & 099
\end{array}$$

nada mais é do que a lista de todos os números até dois dígitos, ou seja, apenas os números com uma e duas casas decimais. Por esse motivo escrevem-se mais simplesmente:

$$0\ 1\ 2\ \cdots\ 9\ 10\ 11\ \cdots\ 19\ 20\ 21\ \cdots\ 97\ 98\ 99$$

e são apenas os números que se seguem a 099 que se chamam números **com três dígitos**, **três algarismos** ou **três casas decimais**. Como anteriormente, notamos que depois de 99 vem 100. Portanto, 100 é o primeiro número com três algarismos.

Neste momento fazemos duas observações; a primeira é que

> *contam-se exatamente* 100 *passos a partir de* 0 *para se atingir* 100, *a partir de* 100 *para se atingir* 200, *a partir de* 200 *para se atingir* 300, *etc.*

Isto porque cada um dos 0, 100, 200, …, é o primeiro número da respetiva linha (estão na coluna esquerda do quadro retangular) e 400, por exemplo, é o primeiro número da quinta linha e 500 é o primeiro número da sexta linha. São necessários 100 passos para ir de 400 a 500 porque são necessários 99 passos para ir de 400 a 499 (há 100 números por linha) e o centésimo passo depois leva de 499 a 500, como se afirmou. A segunda observação é que este processo explica, por exemplo, *por que razão o* 8 *de* 819 *representa não* 8 *ou* 80 *mas* 800, porque

> *este* 8 *em* 819 *indica que* 819 *está na nona linha e consequentemente temos de contar* 100 *passos*, 8 *vezes*, *para ir de* 0 *a* 100, *de* 100 *a* 200, …, *de* 700 *a* 800, *linhas de* 100 *números*, *de maneira a chegar a* 800.